

Cât de amplă poate fi o reuniune de subgrupuri ale unui grup finit?

Marius Tărnăuceanu

28 Decembrie 2022

Abstract

În această lucrare vom prezenta câteva rezultate privitoare la o bine-cunoscută proprietate a subgrupurilor unui grup.

MSC (2020): 20E07.

Key words: grup finit, reuniune de subgrupuri.

Proprietatea menționată este următoarea:

Proprietate. Niciun grup G nu se poate scrie ca reuniunea a două subgrupuri proprii ale sale.

Presupunând că grupul G este finit și considerând două subgrupuri proprii ale sale H_1 și H_2 , apare întrebarea firească:

Cât de multe elemente ale lui G poate conține reuniunea $H_1 \cup H_2$?

Un răspuns la această întrebare este dat de următorul rezultat.

Propoziția 1. *În ipotezele anterioare, are loc inegalitatea*

$$|H_1 \cup H_2| \leq \frac{3}{4} |G|. \quad (1)$$

În plus, avem egalitate în (1) dacă și numai dacă H_1 și H_2 sunt subgrupuri maximale distincte de indice 2 ale lui G .

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned} |H_1 \cup H_2| &= |H_1| + |H_2| - |H_1 \cap H_2| = |H_1| + |H_2| - \frac{|H_1||H_2|}{|H_1 H_2|} \\ &\leq |H_1| + |H_2| - \frac{|H_1||H_2|}{|G|}. \end{aligned}$$

Dacă $n_i = \frac{|H_i|}{|G|}$, atunci $n_i \in (0, \frac{1}{2}]$ din Teorema lui Lagrange, iar inegalitatea anterioară conduce la

$$\begin{aligned} \frac{|H_1 \cup H_2|}{|G|} &\leq n_1 + n_2 - n_1 n_2 = n_1(1 - n_2) + n_2 \\ &\leq \frac{1 - n_2}{2} + n_2 = \frac{1 + n_2}{2} \leq \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

așa cum doream.

Evident, egalitatea se obține dacă și numai dacă $n_1 = n_2 = \frac{1}{2}$ și $H_1 H_2 = G$, adică dacă și numai dacă H_1 și H_2 sunt subgrupuri maximale distincte de indice 2 ale lui G . ■

Mai departe, fie $H_1, \dots, H_n$ subgrupuri proprii ale grupului finit G , unde $n \geq 3$. În acest caz putem avea $H_1 \cup \dots \cup H_n = G$, cel mai simplu exemplu fiind obținut pentru $n = 3$ și H_1, H_2, H_3 subgrupurile de ordin 2 ale grupului lui Klein $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Notăm că grupurile care pot fi scrise ca reuniunea a trei subgrupuri proprii ale lor au fost caracterizate de Scorza [5]:

Teorema 2. *Un grup G poate fi scris ca reuniunea a trei subgrupuri proprii ale sale dacă și numai dacă există un subgrup normal H al lui G astfel încât $G/H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.*

De asemenea, notăm că problemele analoage pentru $n = 4, 5, 6$ au fost studiate de Cohn [2], iar cazul $n = 7$ de Tomkinson [4]. Un excelent survey pe acest subiect este Bhargava [1].

Revenind la problema inițială, demonstrăm în continuare două rezultate din articolul [3].

Teorema 3. *Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există o constantă $\alpha_n < 1$ astfel încât oricare ar fi un grup finit G și n subgrupuri $H_1, \dots, H_n$ ale lui G să avem $H_1 \cup \dots \cup H_n = G$ sau $|H_1 \cup \dots \cup H_n| \leq \alpha_n |G|$.*

Demonstrație. Probăm afirmația prin inducție după n . Pentru $n = 1$ putem lua $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ conform Teoremei lui Lagrange, iar pentru $n = 2$ putem lua $\alpha_2 = \frac{3}{4}$ conform Propoziției 1. Fie $n \geq 3$ și subgrupurile $H_1, \dots, H_n$ ale grupului finit G astfel încât $H_1 \cup \dots \cup H_n \neq G$. Notăm $s_i = [G : H_i]$, $i = 1, \dots, n$, și presupunem că $s_1 \leq \dots \leq s_n$. Fie

$$\beta_n = \min \left\{ \beta \in \mathbb{N}^* \mid \alpha_{n-1} + \frac{1}{\beta} < 1 \right\}.$$

Dacă $s_n \geq \beta_n$, atunci din ipoteza inductivă obținem

$$\begin{aligned} |H_1 \cup \dots \cup H_n| &< |H_1 \cup \dots \cup H_{n-1}| + |H_n| \\ &\leq \left(\alpha_{n-1} + \frac{1}{s_n} \right) |G| \leq \left(\alpha_{n-1} + \frac{1}{\beta_n} \right) |G|. \end{aligned}$$

Dacă $s_n \leq \beta_n$, atunci considerăm subgrupul $H = H_1 \cap \dots \cap H_n$. Utilizând în mod repetat formula lui Poincaré $[G : H_i \cap H_j] \leq [G : H_i][G : H_j]$, găsim că $[G : H] \leq s_1 \cdots s_n \leq \beta_n^n$. Deoarece $H_1 \cup \dots \cup H_n$ este o reuniune de clase la stânga în raport cu H , avem

$$|H_1 \cup \dots \cup H_n| \leq |G| - |H| \leq \left(1 - \frac{1}{\beta_n^n} \right) |G|.$$

Relațiile anterioare arată că pentru

$$\alpha_n = \max \left\{ \alpha_{n-1} + \frac{1}{\beta_n}, 1 - \frac{1}{\beta_n^n} \right\} < 1$$

avem $|H_1 \cup \dots \cup H_n| \leq \alpha_n |G|$, ceea ce încheie demonstrația. ■

Menționăm că Teorema 3 are loc și prin înlocuirea celor n subgrupuri $H_1, \dots, H_n$ cu n clase la stânga $g_1 H_1, \dots, g_n H_n$ în raport cu aceste subgrupuri, demonstrația fiind similară.

Procedând ca mai sus, în cazul $n = 3$ găsim constanta $\alpha_3 = \frac{124}{125}$. De fapt, aceasta poate fi micșorată, cea mai mică astfel de constantă fiind $\alpha_3 = \frac{5}{6}$.¹ Suntem în măsură să indicăm o valoare a constantei α_n și pentru n arbitrar.

Propoziția 4. *Teorema 3 are loc pentru $\alpha_n = \frac{2n!-1}{2n!}$.*

¹Propunem cititorului demonstrarea acestui rezultat.

Demonstrație. Vom folosi notațiile din demonstrația Teoremei 3. Evident, afirmația are loc pentru $n = 1$, deci putem presupune că $n \geq 2$. Dacă $n + 1 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n$, atunci

$$|H_1 \cup \dots \cup H_n| < |H_1| + \dots + |H_n| \leq \frac{n}{n+1} |G| \leq \frac{2n! - 1}{2n!} |G|,$$

așa cum doream.

Fie acum $s_1 \leq n$. Deoarece G este reuniunea tuturor claselor la stânga în raport cu H_1 și $H_1 \cup \dots \cup H_n \neq G$, deducem că există $g \in G$ astfel încât $gH_1 \not\subseteq H_1 \cup \dots \cup H_n$. Atunci $H_1 \not\subseteq g^{-1}H_1 \cup \dots \cup g^{-1}H_n$ și $H_1 \cap g^{-1}H_1 = \emptyset$, ceea ce implică

$$g^{-1}H_1 \cup \dots \cup g^{-1}H_n \subseteq (G \setminus H_1) \cup \bigcup_{i=2}^n (g^{-1}H_i \cap H_1).$$

Dacă $g^{-1}H_i \cap H_1 \neq \emptyset$, atunci există $h_i \in H_1$ astfel încât $g^{-1}H_i \cap H_1 = h_i(H_i \cap H_1)$ și, prin inducție după n , obținem

$$\begin{aligned} \left| (G \setminus H_1) \cup \bigcup_{i=2}^n (g^{-1}H_i \cap H_1) \right| &\leq |G \setminus H_1| + \left| \bigcup_{i=2}^n (g^{-1}H_i \cap H_1) \right| \\ &\leq \frac{s_1 - 1}{s_1} |G| + \alpha_{n-1} |H_1| \\ &= \frac{s_1 + \alpha_{n-1} - 1}{s_1} |G|. \end{aligned}$$

Cum $\alpha_{n-1} - 1 < 0$, rezultă că

$$\frac{s_1 + \alpha_{n-1} - 1}{s_1} \leq \frac{n + \alpha_{n-1} - 1}{n} = \frac{n + \frac{2(n-1)! - 1}{2(n-1)!} - 1}{n} = \frac{2n! - 1}{2n!} = \alpha_n.$$

Astfel

$$\begin{aligned} |H_1 \cup \dots \cup H_n| &= |g^{-1}(H_1 \cup \dots \cup H_n)| \\ &= |g^{-1}H_1 \cup \dots \cup g^{-1}H_n| \\ &\leq \left| (G \setminus H_1) \cup \bigcup_{i=2}^n (g^{-1}H_i \cap H_1) \right| \\ &\leq \alpha_n |G|, \end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstrația. ■

Bibliografie

- [1] M. Bhargava, *Groups as unions of proper subgroups*, Amer. Math. Monthly **116** (2009), 413-422.
- [2] J.H.E. Cohn, *On n -sum groups*, Math. Scand. **75** (1994), 44-58.
- [3] B. Sambale and M. Tărnăuceanu, *On the size of coset unions*, J. Algebraic Combin. **55** (2022), 979-987.
- [4] M.J. Tomkinson, *Groups as the union of proper subgroups*, Math. Scand. **539** (1997), 191-198.
- [5] G. Zappa, *The papers of Gaetano Scorza on group theory* (Italian), Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. (9) Mat. Appl. (2) **2** (1991), 95-101.

Marius Tărnăuceanu
Facultatea de Matematică
Universitatea "Al.I. Cuza"
Iași, Romania
e-mail: tarnauc@uaic.ro